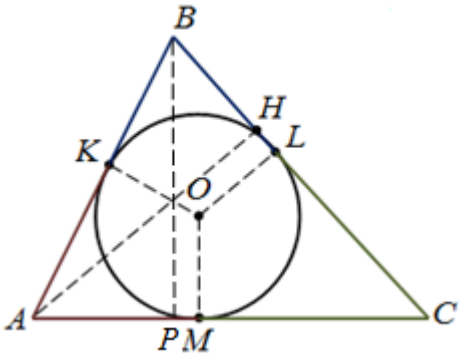

1. Пусть окружность, вписанная в ΔABC касается стороны BC в точке L, а стороны AC – в точке M. Тогда

$$p - BC = \frac{AK + KB + BL + LC + CM + MA}{2} -$$

$$- BL - LC = \frac{AK + KB - BL - LC + CM + MA}{2}.$$

По теореме о касательных, проведённых к окружности из одной точки: $LC = CM$, $MA = AK$ и $KB = BL$. Значит $p - BC = \frac{AK + MA}{2} = AK = MA$, ч.т.д.

2. $p = 15$, $BC = 14$, $r = OK = OL = OM = \sqrt{3}$. Найти $\angle BAC$.

2.1. Находим площадь треугольника ABC по формуле $S = pr$, т.е. $S = 15\sqrt{3}$.

2.2. $AB + BC + AC = 2p = 30 \Rightarrow AB + AC = 30 - BC = 30 - 14 = 16$. Если принять $AB = x$, то $AC = 16 - x$. Выразим площадь треугольника ABC через формулу Герона и, приравняв это выражение найденному в 2.1. значению, получим уравнение для нахождения стороны AB:

$$\sqrt{15 \cdot (15-14) \cdot (15-x) \cdot (15-16+x)} = 15\sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{15(15-x)(x-1)} = 15\sqrt{3} \Rightarrow -15(x^2 - 16x + 15) = 15^2 \cdot 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x^2 + 16x - 15 = 45 \Rightarrow x^2 - 16x + 60 = 0.$$

$$x = 8 \pm \sqrt{64 - 60} \Rightarrow x_1 = 6; x_2 = 10.$$

Не нарушая общности, можно считать, что $AB = 6$; $AC = 10$.

2.3. BP – высота к стороне AC. Тогда $S = \frac{AC \cdot BP}{2} = 5 \cdot BP \Rightarrow 5 \cdot BP = 15\sqrt{3} \Rightarrow$

$$BP = 3\sqrt{3} \Rightarrow \sin(\angle BAC) = \frac{BP}{AB} = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \angle BAC = 60°.$$