6. Даны векторы $\vec{a}(1; -5; 2)$ и $\vec{b}(3; 1; 2)$. Найдите скалярное произведение векторов $2\vec{a}+\vec{b}$ и $3\vec{a}-2\vec{b}$.

Вычисляем поэтапно

$$2\vec{a} = (2;\ -10; 4)$$

$$2\vec{a} + \vec{b} = (5;\ -9; 6)$$

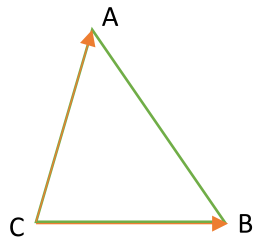
$$3\vec{a} = (3;\ -15; 6)$$

$$2\vec{b} = (6; 2; 4)$$

$$3\vec{a} - 2\vec{b} = (3-6;\ -15-2; 6-4) = (-3;\ -17; 2)$$

$$\left(2\vec{a} + \vec{b}\right)\left(3\vec{a} - 2\vec{b}\right) = -15 + 153 + 12 = 150$$

7. Даны точки $A(0; 1; -1)$, $B(1; -1; 2)$, $C(3; 1; 0)$. Найдите косинус угла C треугольника ABC.



Угол С – это угол между векторами CA и CB.

$$\overrightarrow{CA} = (0-3; 1-1; -1-0) = (-3; 0;\ -1)$$

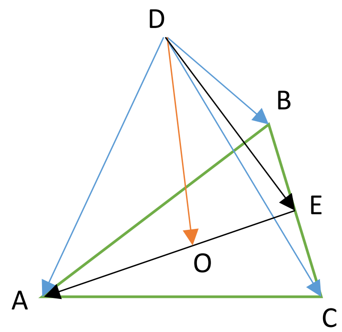
$$\overrightarrow{CB} = (1-3; -1-1; 2-0) = (-2; -2;\ 2)$$

$$\left|\overrightarrow{CA}\right| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2 +\ (-1)^2} = \sqrt{10}$$

$$\left|\overrightarrow{CB}\right| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 +\ 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$\cos C = \frac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{\left|\overrightarrow{CA}\right|\left|\overrightarrow{CB}\right|} = \frac{6+0-2}{2\sqrt{10\cdot 3}} = \frac{2}{\sqrt{30}}$$

8. В тетраэдре $DABC$ точка E — середина стороны BC, а точка O — середина стороны AE. Выразите $\overrightarrow{DO}$ через векторы $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{c}$.



Если складывать по правилу параллелограмма, то

$$\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{DE}$$

$$\vec{b} + \vec{c} = 2\overrightarrow{DE}$$

$$\overrightarrow{DE} = \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2}$$

Для другой пары векторов

$$\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DA} = 2\overrightarrow{DO}$$

$$\frac{\vec{b} + \vec{c}}{2} + \vec{a} = 2\overrightarrow{DO}$$

$$\vec{b} + \vec{c} + 2\vec{a} = 4\overrightarrow{DO}$$

$$\overrightarrow{DO} = \frac{\vec{b} + \vec{c} + 2\vec{a}}{4}$$

9. Найдите длины векторов $\vec{m} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$, $\vec{n} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$, их скалярное произведение и угол между ними, если $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + 2\vec{j}$.

Находим координаты векторов

$$\vec{a}(1;\ -1; 2)$$

$$\vec{b}(2; 2; 0)$$

Вычисляем поэтапно

$$2\vec{a} = (2;\ -2; 4)$$

$$3\vec{b} = (6; 6; 0)$$

$$\vec{m} = (8; 4; 4)$$

$$\vec{n} = (-4; -8; 4)$$

Скалярное произведение

$$\vec{m} \cdot \vec{n} = -32 - 32 + 16 = 48$$

Находим длины векторов

$$|\vec{m}| = \sqrt{8^2 + 4^2 + 4^2} = \sqrt{96}$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{(-4)^2 + (-8)^2 + 4^2} = \sqrt{96}$$

Угол между ними

$$\alpha = \arccos\frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \arccos\frac{48}{96} = \arccos\frac{1}{2} = 60^0$$

10. Компланарны ли векторы: а) $\vec{a}(1; -2; -1)$, $\vec{b}(3; 1; 1)$ $\vec{c}(5; -3; 0)$; б) $\vec{p}(2; 0; -3)$, $\vec{i}, \vec{j}$; в) $\vec{m}(2; 0; -3)$, $\vec{i}, \vec{j}$?

Найдем смешанное произведение векторов

а)

$$\vec{a} \cdot [\vec{b} \times \vec{c}] = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 0 + 3 \cdot 3 \cdot 1 - 5 \cdot 2 \cdot 1 + 5 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot 0 = 7$$

Смешанное произведение не равно нулю, следовательно, вектора не компланарны.

б)

$$\vec{p} \cdot [\vec{i} \times \vec{j}] = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3$$

Смешанное произведение не равно нулю, следовательно, вектора не компланарны.

в)

$$\vec{m} \cdot [\vec{i} \times \vec{j}] = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3$$

Смешанное произведение не равно нулю, следовательно, вектора не компланарны.