

Задание.

Пользуясь определением предела последовательности доказать, что последовательность $\{x_n\}$ имеет предел a :

a) $x_n = \frac{n}{n^2+n+1}$, $a=0$

b) $x_n = n^3+1$, $a=\infty$

Решение.

a) Начнём с определения.

Конечное число a называется пределом числовой последовательности $\{x_n\}$, если для любого положительного (сколь угодно малого) числа ε существует такой номер N (натуральное число), начиная с которого для всех последующих членов последовательности выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$

Так вот нам надо доказать, что такое число N найдётся. Причём для доказательства, заметьте, нам не нужно именно то N с которого начинается выполнение этого неравенства. Можно взять, например, на несколько номеров больше (Если его легче определить). Итак нужно доказать, что

$$\forall \varepsilon \exists N : \left| \frac{n}{n^2+n+1} - 0 \right| < \varepsilon \quad \text{или} \quad \forall \varepsilon \exists N : \left| \frac{n}{n^2+n+1} \right| < \varepsilon \quad \text{как только} \quad n > N$$

Попробуем оценить N из неравенства

$$\left| \frac{n}{n^2+n+1} \right| < \varepsilon \tag{1}$$

Поскольку $n > 0$, и $\varepsilon > 0$, то модуль можно раскрыть так:

$$\frac{n}{n^2+n+1} < \varepsilon \tag{2}$$

Далее надо выразить (оценить) n через ε .

$$\frac{n^2+n+1}{n} > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$n+1+\frac{1}{n} > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$n > \frac{1}{\varepsilon} - 1 - \frac{1}{n} \quad (3)$$

У нас $n \geq 1$, следовательно $0 < \frac{1}{n} < 1$.

$$\text{Значит } \frac{1}{\varepsilon} - 1 - \frac{1}{n} \geq \frac{1}{\varepsilon} - 1$$

Значит если взять n такой, что: $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$, то неравенство (3) также будет выполнено, а следовательно и неравенства (1) и (2). Таким образом, для любого числа ε можно (достаточно) определить номер N так: Натуральное число такое, что

$$N > \frac{1}{\varepsilon} - 1$$

Например для $\varepsilon = 0,001$ достаточно будет взять

$$N > \frac{1}{0,001} - 1 = 1000 - 1 = 999$$

$$N = 1000$$

А для $\varepsilon = 0,012$

$$N > \frac{1}{0,012} - 1 = 83,(\overline{3}) - 1 = 82,(\overline{3})$$

$$N = 83.$$

Итак, мы нашли правило, согласно которому можно для любого наперёд заданного числа ε подобрать номер N такой, чтобы выполнялись требования, заданные в определении. Значит 0 является пределом нашей последовательности.

b) Теперь $x_n = n^3 + 1$

Вообще-то эта последовательность конечного предела не имеет и с ней поступить по определению выше я не могу. Но эта последовательность является бесконечно большой и с её можно проверять, пользуясь определением бесконечно большой последовательности. Ну заодно можно показать, что она стремится именно к положительной бесконечности (и только к ней).

Последовательность $\{x_n\}$, Называется бесконечно большой, Если для

любого положительного (сколь угодно большого) числа A существует такой номер N (натуральное число), начиная с которого для всех последующих членов последовательности выполняется неравенство $|x_n| > A$.

Ну в нашем случае ещё покажем, что начиная с некоторого номера $x_n > 0$.
Вот тогда, пожалуй можно будет утверждать, что $\{x_n\} \rightarrow \infty$

Итак общий член последовательности $x_n = n^3 + 1$.

$$n \geq 1 \Rightarrow n^3 + 1 > 0$$

Рассмотрим неравенство

$$n^3 + 1 > A \quad (4)$$

Оценим n через A .

$$n^3 > A - 1$$

Для $A > 1$ n должно быть

$$n > \sqrt[3]{A-1} \quad (5)$$

A при $A \leq 1$ достаточно взять $n=1$.

Т.е. число N в зависимости от $A > 0$ можно подбирать таким образом:

Если $A \leq 1$ то $N=1$, иначе $N > \sqrt[3]{A-1}$ нужно взять ближайшее большее натуральное.

Итак правила подбора N мы определили, значит согласно определению наша последовательность является бесконечно большой. А так как все её члены положительны, то она стремится именно к $+\infty$.