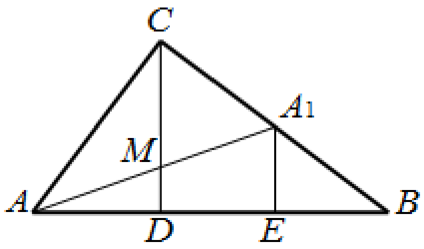
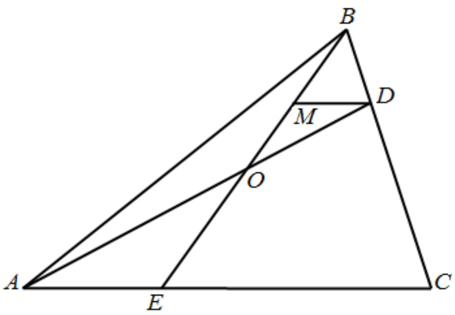
1. В прямоугольном треугольнике АВС с прямым углом С медиана $АА_1$ пересекает высоту СД в точке М так, что АМ : МА = 2:3. Найдите отношение АД :ДВ.




Того, что напечатано в условии, не может быть, т.к. $AM:MA=1:1$! Решаю в предположении, что $AM:MA_1=2:3$. Если моё предположение не верно, то и решение будет не верным!
Проведём $A_1E \parallel CD$. По теореме о пропорциональных отрезках $AD:DE = AM:MA_1 = 2:3$. Пусть $AD = 2x$, $DE = 3x$. Т.к. $AA_1$ – медиана, то $CA_1 = A_1B$ и, значит, $A_1E$ – средняя линия треугольника $BCD$, поэтому $BE = DE = 3x$, $DB = DE + BE = 6x$.
$AD:DB = 2x:6x = 1:3$.

2. На стороне ВС треугольника АВС взята точка Д такая, что ВД :ДС = 2:5, а на стороне АС – точка Е так, что АЕ = $\frac{1}{3}$АС. В каком соотношении делятся отрезки ВЕ и АД точкой их пересечения О?




Прямые $BE$ и $AD$ пересекаются в точке $O$, $BD:DC = 2:5$, $AE:AC = 1:3$. На прямой $BE$ возьмём точку $M$ такую, что $MD \parallel AC$. Тогда $\Delta MBD \sim \Delta EBC$ и $\frac{MD}{CE} = \frac{DB}{BC}$, отсюда:

$$MD = \frac{CE \cdot DB}{BC} \qquad (1).$$

$\Delta OMD \sim \Delta OEA$ по 1-му признаку подобия: $\angle DOM = \angle AOE$ как вертикальные, $\angle OAE = \angle ODM$ как внутренние накрест лежащие при параллельных $MD$ и $AC$ и секущей $AD$. Из подобия треугольников $OMD$ и $OEA$: $\frac{MD}{EA} = \frac{OD}{AO}$ или

$$MD = \frac{EA \cdot OD}{AO} \qquad (2).$$

Поделив равенство (1) на равенство (2), получим:

$$1 = \frac{CE \cdot DB}{BC} \cdot \frac{AO}{EA \cdot OD} \quad \text{или} \quad \frac{AO}{OD} \cdot \frac{DB}{BC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1 \qquad (3).$$

По существу, сейчас я доказал ***теорему Менелая:*** *Если прямая BE пересекает стороны AD и AC треугольника ADC в точках O и E соответственно, а продолжение стороны DC – в точке B, то* $\frac{AO}{OD} \cdot \frac{DB}{BC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$.

Почему-то сейчас эта простая теорема не входит в школьный курс планиметрии.
Для прямой $AD$, пересекающей стороны $BE$ и $BC$ треугольника $EBC$ в точках $O$ и $M$ соответственно и продолжение стороны $CE$ – в точке $A$ по теореме Менелая:

$$\frac{BO}{OE}\cdot\frac{EA}{AC}\cdot\frac{CD}{DB}=1 \qquad (4).$$

Для простоты запоминания: начинать можно с любой точки, первая буква в числителе первой дроби должна быть последней в знаменателе третьей дроби, вторая буква в числителе каждой дроби – первая в знаменателе этой же дроби, первая буква в числителе последующей дроби – вторая в знаменателе предыдущей дроби.

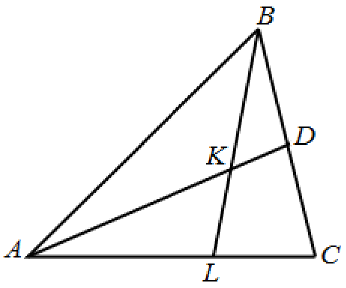
Вернёмся к равенству (3): $\frac{AO}{OD}\cdot\frac{DB}{BC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$. $AE:AC=1:3 \Leftrightarrow CE:EA=2:1$.

$BD:DC=2:5$, $BC=BD+DC \Rightarrow DB:BC=2:7$ (единицу измерения можно выбрать так, что $BD=2$, $DC=3$). $\frac{AO}{OD}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{2}{1}=1 \Leftrightarrow AO:OD=7:4$.

Равенство (4): $\frac{BO}{OE}\cdot\frac{EA}{AC}\cdot\frac{CD}{DB}=1$.

$BD:DC=2:5 \Leftrightarrow CD:DB=5:2$. $\frac{BO}{OE}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{2}=1 \Leftrightarrow BO:OE=6:5$.

**3. Пусть АД – медиана треугольника АВС. На стороне АД взята точка К так, что АК : КД = =3:1. Прямая ВК разбивает треугольник АВС на два треугольника. Найдите отношение площадей этих треугольников.**




Пусть прямая *BK* пересекает сторону *AC* в точке *L* и разбивает $\Delta ABC$ на треугольники *ABL* и *LBC*. Требуется найти отношение площадей этих треугольников. Т.к. у треугольников *ABL* и *LBC* общая высота из вершины *B* к основаниям *AL* и *LC*, то $S_{\Delta ABL}:S_{\Delta LBC}=AL:LC$. Отношение $AL:LC$ найдём с помощью теоремы Менелая: $\frac{CL}{LA}\cdot\frac{AK}{KD}\cdot\frac{DB}{BC}=1$. По условию $\frac{AK}{KD}=\frac{3}{1}$, а $\frac{BD}{DC}=\frac{1}{2}$, т.к. *AD* – медиана. Имеем $\frac{CL}{LA}\cdot\frac{3}{1}\cdot\frac{1}{2}=1 \Rightarrow CL:LA=2:3 \Rightarrow AL:LC=3:2$

и $S_{\Delta ABL}:S_{\Delta LBC}=3:2$.