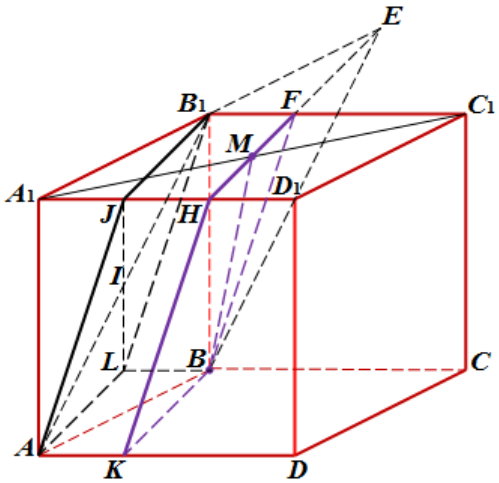
В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 2 точка M является серединой отрезка A_1C_1:

а) Постройте сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через прямую BM параллельно прямой AB_1;
б) Найдите расстояние между прямыми AB_1 и BM.

а) Плоскость, проходящая через прямую BM параллельно прямой AB_1, пересекает плоскость грани AA_1B_1B по прямой, параллельной прямой AB_1, и т.к. точка $B \in (AA_1B_1B)$, то эта прямая проходит через точку B. Проводим через точку B прямую, параллельную AB_1, которая пересечёт продолжение ребра A_1B_1 в точке E, которая принадлежит плоскостям граней AA_1B_1B, $A_1B_1C_1D_1$ и плоскости сечения.
Точки E и M принадлежат плоскости сечения и плоскости грани $A_1B_1C_1D_1$, значит, эти плоскости пересекаются по прямой, проходящей через точки E и M, которая пересекает рёбра B_1C_1 и A_1D_1 в точках F и H соответственно.



Точки F и B принадлежат плоскости сечения и плоскости грани BB_1C_1C, значит, эти плоскости пересекаются по прямой FB.
Грани BB_1C_1C и AA_1D_1D параллельны, поэтому плоскость сечения пересекает их по параллельным прямым. Через точку H проводим $HK \parallel FB$. Соединяем точки B и K. Сечение $BFHK$ построено. Отметим, что $FH \parallel BK$, т.к. грани $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ параллельны.
б) Проще всего расстояние между прямыми AB_1 и BM найти как расстояние между плоскостью сечения и параллельной ей плоскостью, проходящей через AB_1. Построим эту плоскость. Т.к. искомая плоскость параллельна сечению, то она пересекает плоскости граней $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ по прямым, параллельным FH и BK и проходит через точки A и B_1. Проводим $B_1J \parallel FH$ и $AL \parallel KB$ (L – точка пересечения продолжения ребра CB и прямой проходящей через точку A).
$AJB_1L \parallel KHFB$ по построению, $JB_1FH \parallel ALBK$ т.к. $ABCD \parallel A_1B_1C_1D_1$ и $AJHK \parallel LB_1FB$ т.к. $AA_1D_1D \parallel BB_1C_1C$, т.е. $ALBKJB_1FH$ – параллелепипед. Если считать $ALBK$ и JB_1FH основаниями этого параллелепипеда, то его высота равна ребру куба (например, AA_1). Т.к. $AB \perp BC$, то AB – высота параллелограмма $ALBK$, и объём параллелепипеда $ALBKJB_1FH$

$$V = AK \cdot AB \cdot AA_1 = 4AK.$$

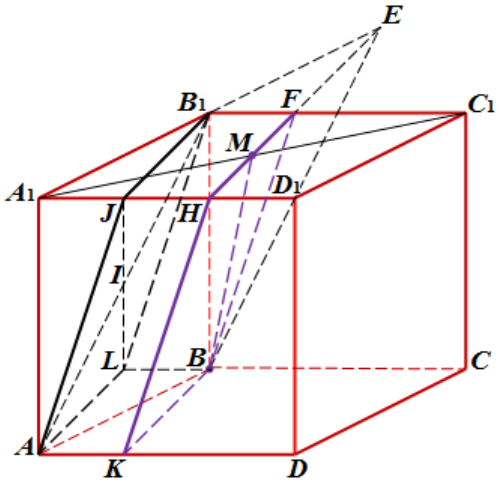
Найдём AK. Отметим, что $AK = LB = B_1F = JH$. $AB \parallel B_1E$ и $AB_1 \parallel BE \Rightarrow ABEB_1$ - параллелограмм, и $B_1E = AB$, но $AB = A_1B_1$, поэтому $B_1E = A_1B_1$. $B_1F \parallel A_1H$, значит, B_1F – средняя линия треугольника A_1EH: $B_1F = \frac{1}{2}A_1H \Leftrightarrow A_1H = 2B_1F$.
$\Delta A_1MH = \Delta C_1MF$ по 2-му признаку равенства треугольников: $A\ M = MC_1$, т.к. по условию M – середина A_1C_1, $\angle A_1MH = \angle C_1MF$ (вертикальные) и $\angle MA_1H = \angle MC_1F$

(накрест лежащие при параллельных A_1D_1 и B_1C_1 и секущей A_1C_1), поэтому $FC_1 = A_1H = 2B_1F$.

$B_1C_1 = B_1F + FC_1 = 3FC_1 \Rightarrow FC_1 = \frac{1}{3}B_1C_1 = \frac{2}{3} \Rightarrow AK = \frac{2}{3}$, $FC_1 = \frac{4}{3}$ и $V = \frac{8}{3}$.

Если теперь считать основанием параллелепипеда $ALBKJB_1FH$ параллелограмм AJB_1L, то его высота будет равна расстоянию от плоскости AJB_1L до плоскости сечения, а значит, и расстоянию между прямыми AB_1 и BM. Поделив объём параллелепипеда $ALBKJB_1FH$ на площадь параллелограмма AJB_1L, найдём это расстояние.

Итак, ищем площадь AJB_1L.



$JB_1 \parallel HE$ по построению, значит, JB_1 – средняя линия треугольника средняя линия треугольника A_1EH: $A_1J = \frac{1}{2}A_1H$, но $A_1H = FC_1 = \frac{4}{3} \Rightarrow A_1J = \frac{2}{3}$. По теореме Пифагора

$JB_1^2 = JA_1^2 + A_1B_1^2 = \frac{4}{9} + 4 = \frac{40}{9} \Rightarrow JB_1 = \frac{2\sqrt{10}}{3}$. Аналогично, $AJ = \frac{2\sqrt{10}}{3}$, т.е. AJB_1L – ромб, I – точка пересечения его диагоналей. $AB_1 \perp JL$. AB_1 – диагональ грани куба AA_1B_1B, поэтому $AB_1 = 2\sqrt{2}$.

$B_1I = \frac{1}{2}AB_1 = \sqrt{2}$. По теореме Пифагора

$JI^2 + B_1I^2 = JB_1^2 \Leftrightarrow JI^2 + 2 = \frac{40}{9} \Leftrightarrow JI^2 = \frac{40}{9} - 2 = \frac{22}{9} \Rightarrow JI = \frac{\sqrt{22}}{3} = \frac{1}{2}JL$.

$S_{AJB_1L} = \frac{1}{2}AB_1 \cdot JL = 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{22}}{3} = \frac{4\sqrt{11}}{3}$. Расстоянию между прямыми AB_1 и BM:

$$d = \frac{8}{3} : \frac{4\sqrt{11}}{3} = \frac{2}{\sqrt{11}} = \frac{2\sqrt{11}}{11}.$$